
Листки задач по перечислительной комбинаторике

Алгебра структур, species, производящие функции, производные, композиция и симметрии

Contents

Листок 1. Алгебра структур и списки	2
Листок 2. Деревья Каталана: OGF, EGF и производная	3
Листок 3. Помеченные корневые деревья	4
Листок 4. Разбиения множества: Bell, Stirling и производная	5
Листок 5. Endofunctions	6
Листок 6. Повторение и перенос	7
Листок 7. Маркеры и частные производные	8
Листок 8. Композиция species, Bell polynomials, Faà di Bruno	9
Листок 9. Атомная дырка, рекурсивная дырка и zipper	10
Листок 10. Производные регулярных выражений Бржозовского	11
Листок 11. Синтез	12
Листок 12. Burnside–Pólya и cycle index series	13

Листок 1. Алгебра структур и списки

Задача 1. Есть тип L конечных списков из атомов X . Запишите рекурсивное уравнение для L , используя только 1 , X , сложение и умножение типов. Опишите, из каких двух случаев состоит список.

Задача 2. Из списка удалили один элемент, но место удаления сохранили как дырку: $[a,b,c,d,e] \mapsto [a,b,\square,d,e]$. Какие две более простые структуры полностью определяют полученный объект? Угадайте формулу для L' .

Задача 3. Не пользуясь готовой формулой для L' , продифференцируйте рекурсивное уравнение из задачи 1, пользуясь правилами $1' = 0$, $X' = 1$, $(AB)' = A'B + AB'$. Сравните результат с задачей 2.

Задача 4. Пусть $L(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. Объясните комбинаторно, почему коэффициент при x^n равен 1, если мы забыли метки и считаем только форму списка. Найдите $L(x)$ в замкнутом виде.

Листок 2. Деревья Каталана: OGF, EGF и производная

Задача 1. Рассмотрим полные плоские бинарные деревья, где атомами считаются листья. Запишите структурное уравнение B . Какая производящая функция естественнее для непомеченных форм — OGF или EGF? Почему?

Задача 2. Пусть $B(x) = \sum_{n \geq 1} b_n x^n$, где b_n — число форм с n листьями. Переведите структурное уравнение в уравнение для $B(x)$ и найдите $b_1, \dots, b_5$ без явной формулы Каталана.

Задача 3. Теперь n листьев получают различные метки. Если непомеченных форм b_n , сколько получается помеченных деревьев? Что произойдёт, если эти числа упаковать в EGF?

Задача 4. Удаляем один лист и оставляем дырку. Если дырка — всё дерево, что получается? Если нет, какую информацию надо хранить на каждом шаге от дырки к корню? Запишите рекурсивное уравнение для B' .

Задача 5. Продифференцируйте формально $B = X + B^2$ и сравните с комбинаторным уравнением для B' .

Задача 6. Зафиксируйте соглашение: размер — число листьев. Какой размер имеют X , B и B^2 ? Почему внутренний корень не даёт дополнительной единицы размера?

Задача 7. Если левое поддерево имеет k листьев, а правое m , какой размер имеет всё дерево? Как это отражается в коэффициенте при x^{k+m} в $B(x)^2$?

Задача 8. Объясните, почему произведение $B(x)^2$ для непомеченных форм не содержит биномиального коэффициента выбора меток, а в помеченном случае естественно возникает EGF.

Задача 9. В модели $B = X + B^2$ атомами являются только листья. Что именно означает B' ? Можно ли дыркой заменить внутреннюю вершину?

Задача 10. Пусть дырка не является всем деревом. Опишите один слой контекста: что надо знать, чтобы из дырки сделать шаг к родителю?

Задача 11. Если слоёв контекста может быть $0, 1, 2, \dots$, какой тип описывает весь контекст? Запишите его через $\text{SEQ}(2B)$.

Задача 12. Получите уравнение $B' = 1 + 2BB'$, решите его как геометрический ряд и свяжите ответ с $\text{SEQ}(2B)$.

Листок 3. Помеченные корневые деревья

Задача 1. Пусть T — корневые помеченные неплоские деревья: атомы — все вершины, одна вершина выделена как корень, дети не упорядочены. После удаления корня дерево распадается на несколько корневых поддеревьев. Запишите T через X , T и SET . Объясните роль X и $\text{SET}(T)$.

Задача 2. Почему для этих деревьев естественно использовать EGF, а не OGF? Объясните через распределение меток между компонентами.

Задача 3. Пусть $A(x)$ — EGF помеченного класса A . Выведите EGF для $\text{SET}_k(A)$: сначала для упорядоченной k -ки, затем забудьте порядок. После этого просуммируйте по $k \geq 0$ и получите $\text{SET}(A)$.

Задача 4. Переведите $T = X \cdot \text{SET}(T)$ в функциональное уравнение для EGF $T(x)$. Отдельно объясните, чему соответствуют X и $\text{SET}(T)$.

Задача 5. Если $T(x) = \sum_{n \geq 1} t_n \frac{x^n}{n!}$, что комбинаторно означает t_n ? Как оно связано с числом неукоренённых помеченных деревьев на n вершинах?

Задача 6. Используйте формулу Лагранжа: если $Y = x\varphi(Y)$, то $[x^n]Y = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\varphi(u)^n$. Примените её к $T = xe^T$ и найдите t_n .

Задача 7. Из результата предыдущей задачи получите число неукоренённых помеченных деревьев на n вершинах.

Задача 8. Пусть U — species неукоренённых помеченных деревьев. Что означают U' и XU' ? Объясните комбинаторно, почему $XU' = T$, и переведите это в уравнение для EGF.

Задача 9. Получите U через T без прямого интегрирования e^T . Продифференцируйте $T = xe^T$, выразите e^T через T и T' и узнайте производную простой функции от T .

Листок 4. Разбиения множества: Bell, Stirling и производная

Задача 1. Берём конечное множество различных меток и разбиваем его на непустые блоки. Что является атомом X ? Какой тип имеет один блок? Как из блоков строится всё разбиение? Запишите species Π всех разбиений.

Задача 2. В разбиении один атом заменён дыркой. Разбейте структуру на: (a) остаток блока, в котором была дырка; (b) все остальные блоки. Объясните структурное равенство $\Pi' = \text{SET}(X) \cdot \Pi$.

Задача 3. Переведите $\Pi' = \text{SET}(X) \cdot \Pi$ в EGF и сравните коэффициенты. Получите рекурсию для чисел Белла B_n .

Задача 4. Введите маркер u числа блоков. Найдите двухпеременную EGF $\Pi(x, u)$ и объясните смысл коэффициента при $u^k x^n / n!$.

Задача 5. Что комбинаторно означает $\frac{\partial \Pi}{\partial u}$? Что получится после подстановки $u=1$?

Задача 6. Получите рекурсию $S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$ для чисел Стирлинга второго рода, рассматривая положение нового специального элемента.

Задача 7. Вычислите $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Pi}{\partial u}$ для $\Pi(x, u)$, получите PDE, связывающее эти производные, и дайте ему комбинаторную интерпретацию.

Задача 8. Сравните коэффициенты в PDE и восстановите рекурсию для $S(n, k)$ непосредственно из производящих функций.

Задача 9. Положите $u=1$ и объясните связь чисел Белла и Стирлинга: $B_n = \sum_k S(n, k)$.

Листок 5. Endofunctions

Задача 1. Пусть $f : S \rightarrow S$ — отображение конечного помеченного множества в себя. Рассмотрите ориентированный граф, где из v идёт ребро в $f(v)$. Почему каждая связная компонента содержит ровно один ориентированный цикл?

Задача 2. Опишите одну связную компоненту endofunction: что прикреплено к каждой вершине цикла?

Задача 3. Запишите species одной связной компоненты через $\text{CYC}(T)$, где T — корневые помеченные деревья.

Задача 4. Запишите species всех endofunctions как множество связных компонент.

Задача 5. Для помеченного класса A выведите EGF $\text{CYC}(A)$, начиная с упорядоченной k -ки A -объектов и учитывая циклические повороты.

Задача 6. Используйте $E = \text{SET}(\text{CYC}(T))$ и правила для SET/CYC, чтобы упростить $E(x)$ до простой функции от $T(x)$.

Задача 7. Посчитайте endofunctions на $[n]$ непосредственно. Какой коэффициент должен иметь $\frac{1}{1-T(x)}$ при $x^n/n!$?

Задача 8. Объясните комбинаторный смысл совпадения EGF $E(x) = \frac{1}{1-T(x)}$ с EGF $\text{SEQ}(T)$. Почему равенство EGF само по себе не даёт естественного изоморфизма species?

Задача 9. Рассмотрите E' : endofunction с одной дыркой вместо вершины. Разберите структуру по слоям: обычные компоненты; особая компонента; дерево с дыркой; разрезанный цикл. Соберите формулу для E' .

Листок 6. Повторение и перенос

Задача 1. Сравните два класса: (A) полные плоские бинарные деревья Каталана, размер — число листьев; (B) произвольные корневые помеченные деревья, размер — число вершин. Для каждого укажите атом X, структурное уравнение и естественный тип производящей функции (OGF/EGF).

Задача 2. Для каждого описания назовите естественную операцию: SET, SEQ, CYC или произведение: (1) несколько неупорядоченных корневых деревьев; (2) несколько деревьев в линейном порядке; (3) деревья расположены по окружности без начала; (4) один специальный блок разбиения и обычное разбиение остальных элементов.

Задача 3. Пусть $A(x)$ — EGF помеченного класса A. Запишите формулы для $SET(A)$, $SEQ(A)$, $CYC(A)$ и кратко объясните каждую.

Задача 4. Пусть F и G — помеченные species. Объясните, почему для произведения species коэффициент на n метках равен $\sum_k \binom{n}{k} f_k g_{n-k}$, и почему это соответствует обычному произведению EGF.

Задача 5. Для трёх классов дайте словесный смысл производной: L' для списков; B' для $B = X + B^2$ с атомами-листьями; T' для корневых помеченных деревьев, где атомы — все вершины.

Задача 6. Для корневых помеченных деревьев T разберите T' и XT' . Если $t_n = n^{n-1}$, сколько структур типа XT' на n метках?

Задача 7. Endofunctions $E = SET(CYC(T))$ и $SEQ(T)$ имеют одинаковую EGF. Что отсюда можно заключить о числах объектов каждого размера? Чего нельзя заключить о самих species?

Задача 8. Сформулируйте разницу между: (1) одинаковыми числами объектов каждого размера; (2) существованием явной биекции по размерам; (3) естественным изоморфизмом species.

Задача 9. Дайте структурную интерпретацию выражений $SET(T)$, $CYC(T)$, XT' и T' без обращения к готовым формулам.

Листок 7. Маркеры и частные производные

Задача 1. Пусть u считает число компонент. Объясните комбинаторный смысл $\frac{d}{du}(u^k) = ku^{k-1}$. Чем отличаются $\frac{\partial}{\partial u}$ и $u \frac{\partial}{\partial u}$?

Задача 2. Для $\Pi(x, u) = \exp(u(e^x - 1))$ объясните комбинаторный смысл $\frac{\partial \Pi}{\partial u}$ и $u \frac{\partial \Pi}{\partial u}$.

Задача 3. Для той же $\Pi(x, u)$ объясните комбинаторный смысл $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ и $x \frac{\partial \Pi}{\partial x}$. Сравните маркер u и атомную переменную x .

Задача 4. Что означают $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u^2}$ и $u^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u^2}$? Являются ли два выделенных блока упорядоченными? Как получить неупорядоченную пару выделенных блоков?

Задача 5. Пусть u считает число циклов перестановки. Что комбинаторно означают $u \frac{\partial P}{\partial u}$ и $\frac{1}{2} u^2 \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}$? Проверьте смысл на перестановках трёх элементов.

Задача 6. Запишите species перестановок как $\text{SET}(\text{CYC}(X))$ и получите двухпеременную EGF $P(x, u)$, где u отмечает циклы.

Задача 7. Вычислите $u \frac{\partial P}{\partial u}$ и объясните результат двумя способами: по коэффициентам ряда и по замкнутой формуле.

Задача 8. Положите $u=1$ и найдите EGF общего числа циклов во всех перестановках n элементов. Выведите, что среднее число циклов равно H_n .

Задача 9. Используйте $u^2 P_{uu} \big|_{u=1}$ для вычисления второго факториального момента числа циклов и выразите через него дисперсию.

Листок 8. Композиция species, Bell polynomials, Faà di Bruno

Задача 1. Пусть $F=SEQ$ и $G = SET_{\geq 1}(X)$. На множестве меток $\{1,2,3\}$ опишите структуры $F \circ G$ и посчитайте их число. Помните: общий размер по-прежнему равен числу исходных атомов.

Задача 2. Замените внешний SEQ на SET: $SET(SET_{\geq 1}(X))$. Для $n=3$ получите число разбиений через $\exp(G(x))$ и объясните роль делителей $k!$.

Задача 3. Пусть $G(x) = e^x - 1$. Для $n=4$ рассмотрите $\frac{G(x)^2}{2!}$. Отдельно посчитайте разбиения типов $1+3$ и $2+2$ и проверьте коэффициент при x^4 .

Задача 4. Посчитайте число разбиений 5 элементов типа $1+2+2$ и 6 элементов типа $2+2+2$: комбинаторно и через соответствующие члены $\frac{G(x)^k}{k!}$.

Задача 5. Пусть m_j — число блоков размера j . Выведите число разбиений фиксированного типа $(m_1, m_2, \dots)$ и проверьте формулу на типе $1+1+2+3$ при $n=7$.

Задача 6. Пусть $G(x) = \sum_{j \geq 1} g_j \frac{x^j}{j!}$. Объясните появление множителя $g_j^{m_j}$. Для $n=5, k=3$ сравните типы $3+1+1$ и $2+2+1$; затем измените g_2 с 1 на 2.

Задача 7. Пусть $F(y) = \sum_k f_k \frac{y^k}{k!}$ и $G(x) = \sum_j g_j \frac{x^j}{j!}$. Объясните формулу $a_n = \sum_k f_k B_{n,k}(g_1, g_2, \dots)$ для коэффициентов $F(G(x))$. Проверьте её на $F=SEQ, G = SET_{\geq 1}(X), n=3$.

Задача 8. Пусть $H(x)=F(G(x))$. Выведите H'' комбинаторно, различая случаи: два выделенных атома попали в один G -блок или в два разных блока.

Задача 9. Выведите H''' комбинаторно по типам разбиения трёх различных флажков: $3, 2+1, 1+1+1$. Объясните коэффициент 3.

Листок 9. Атомная дырка, рекурсивная дырка и zipper

Задача 1. Для списка $L=1+XL$ и конкретного списка $[a,b,c,d]$ сравните два вида фокуса: (a) атомная дырка вместо c ; (b) дырка вместо целого хвоста $[c,d]$. Какую информацию хранит каждый контекст?

Задача 2. Запишите одношаговый конструктор списка $\Phi(X, Y) = 1 + XY$. Что означает $\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = X$ как один frame рекурсивного контекста? Как последовательность frames восстанавливает префикс?

Задача 3. Для каталановского дерева $B = X + B^2$ запишите $\Phi(X, Y) = X + Y^2$ и найдите $\frac{\partial \Phi}{\partial Y}$. Расшифруйте один frame как «лево/право + соседнее поддерево» и объясните, почему полный контекст — $SEQ(2B)$.

Задача 4. Пусть общий рекурсивный тип удовлетворяет $T = \Phi(X, T)$. Обозначьте $A = \Phi_Y(X, T)$ и $C = SEQ(A)$. Покажите структурно, что $T' = C \cdot \Phi_X$ в рассматриваемых простых случаях.

Задача 5. Примените предыдущую схему к списку: $\Phi(X, Y) = 1 + XY$. Получите C и L' и объясните, почему атомная дырка содержит больше информации, чем дырка вместо рекурсивного хвоста.

Задача 6. Примените схему к $D = X + XD^2$ (атомами считаются все вершины). Для $\Phi(X, Y) = X + XY^2$ найдите Φ_Y , C , Φ_X и D' . Дайте zipper-интерпретацию каждого множителя.

Листок 10. Производные регулярных выражений Бржозовского

Задача 1. Для $R = (a + b)b$ найдите $D_a(R)$ и $D_b(R)$ непосредственно из определения $D_a L = \{w : aw \in L\}$.

Задача 2. Для $R = a^*b$ найдите $D_a(R)$, $D_b(R)$ и определите, является ли R nullable.

Задача 3. Используйте правило произведения $D_a(RS) = D_a(R)S +$ (если R nullable) $D_a(S)$, чтобы заново найти $D_a(a^*b)$.

Задача 4. Для $R = (ab)^*$ найдите $D_a(R)$ и $D_b(R)$, используя правило $D_a(R^*) = D_a(R)R^*$.

Задача 5. Для $R = (ab)^*$ найдите все различные производные, возникающие после чтения любых слов, и отметьте nullable-состояния.

Задача 6. Пусть $R = (a + b)^*ab$. Найдите $D_a(R)$ и $D_b(R)$.

Задача 7. Пусть $Q = R + b$ и $P = R + \varepsilon$. Найдите производные Q и P по a и b ; определите, какие остаточные языки nullable.

Задача 8. Определим $D_{uv}(R) = D_v(D_u(R))$. Для языка слов, оканчивающихся на ab , найдите остаточные языки после префиксов a , aa , aba , $abab$. Сформулируйте смысл $D_w(R)$.

Листок 11. Синтез

Задача 1. Конечное множество непустых линейно упорядоченных блоков на помеченных атомах: исходное множество меток разбивается на непустые блоки, внутри каждого блока задан линейный порядок, а блоки между собой не упорядочены. Запишите species, EGF, объясните выбор EGF и введите маркер u и числа блоков.

Задача 2. Помеченные атомы разбиты на непустые циклически упорядоченные блоки; сами блоки не упорядочены. Определите species и EGF.

Задача 3. Разбиение помеченного множества на непустые блоки, причём один блок выделен. Запишите species, EGF и свяжите с $\frac{\partial \Pi}{\partial u}$ при $u=1$ для $\Pi(x, u) = \exp(u(e^x - 1))$.

Задача 4. Разбиение помеченного множества, в котором один атом выделен. Получите EGF двумя способами: непосредственно и через pointing. Не спутайте $\Pi'(x)$ и $x\Pi'(x)$.

Задача 5. Корневое помеченное дерево с дополнительно выделенной вершиной, которая может совпадать с корнем. Запишите species/операцию, EGF и число таких структур на n метках, если обычных корневых деревьев n^{n-1} .

Задача 6. Помеченное множество разбито на циклы, и один цикл выделен. Запишите species, EGF и свяжите с маркером числа циклов в $P(x, u) = (1 - x)^{-u}$.

Задача 7. Полное плоское бинарное дерево $B = X + B^2$, атомы — листья. Сравните непомеченную OGF и помеченную EGF после назначения различных меток листьям. Если OGF-коэффициент равен C_{n-1} , сколько помеченных деревьев?

Задача 8. Неупорядоченное множество непустых линейных списков, причём в каждом списке один атом выделен. Запишите species, EGF и укажите, где появляется pointing.

Листок 12. Burnside–Pólya и cycle index series

Задача 1. Возьмите species SET на фиксированном множестве $\{1,2,3\}$. Любая перестановка меток сохраняет единственную SET-структуру. В S_3 есть 1 тождество, 3 транспозиции и 2 трёхцикла. Запишите $Z_{\text{SET},3}(p_1, p_2, p_3)$ как усреднение мономов циклических типов.

Задача 2. Из $Z_{\text{SET},3}$ сделайте две подстановки: (a) $p_1 = x, \quad p_2 = p_3 = \dots = 0$; (b) $p_j = x^j$. Объясните, почему первая даёт помеченную EGF-часть, а вторая — непомеченную OGF-часть.

Задача 3. Выведите общий cycle index SET: сгруппируйте перестановки по числам m_j циклов длины j , используйте число перестановок данного циклического типа $\frac{n!}{\prod_j j^{m_j} m_j!}$, а затем просуммируйте по всем наборам (m_j) .

Задача 4. Для SET на 3 позициях подставьте $p_j = r^j + b^j$. Упростите результат и интерпретируйте коэффициенты как орбиты двухцветных раскрасок.

Задача 5. Для четырёх вершин на окружности с точностью до вращений используйте cycle index C_4 : $\frac{1}{4}(p_1^4 + p_2^2 + 2p_4)$. Подставьте $p_j = r^j + b^j$, упростите и объясните, почему при двух красных и двух синих возникают две орбиты.

Задача 6. Объясните, как формула Burnside превращается в cycle index, если вместо немедленного суммирования по симметриям сохранять «паспорт» циклического типа $p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots$. Почему подстановка $p_j = r^j + b^j$ считает раскраски, фиксированные данной перестановкой?