
Листки задач по перечислительной комбинаторике

Алгебра структур, species, производящие функции, производные, композиция и симметрии

С краткими решениями для самопроверки

Contents

Листок 1. Алгебра структур и списки	2
Листок 2. Деревья Каталана: OGF, EGF и производная	3
Листок 3. Помеченные корневые деревья	5
Листок 4. Разбиения множества: Bell, Stirling и производная	6
Листок 5. Endofunctions	7
Листок 6. Повторение и перенос	8
Листок 7. Маркеры и частные производные	9
Листок 8. Композиция species, Bell polynomials, Faà di Bruno	10
Листок 9. Атомная дырка, рекурсивная дырка и zipper	11
Листок 10. Производные регулярных выражений Бржозовского	12
Листок 11. Синтез	13
Листок 12. Burnside–Pólya и cycle index series	14

Листок 1. Алгебра структур и списки

Задача 1. Есть тип L конечных списков из атомов X . Запишите рекурсивное уравнение для L , используя только 1 , X , сложение и умножение типов. Опишите, из каких двух случаев состоит список.

Краткое решение. Список либо пуст, либо состоит из первого атома X и хвоста L . Поэтому $L = 1 + XL$.

Задача 2. Из списка удалили один элемент, но место удаления сохранили как дырку: $[a,b,c,d,e] \rightarrow [a,b,\square,d,e]$. Какие две более простые структуры полностью определяют полученный объект? Угадайте формулу для L' .

Краткое решение. Объект задаётся списком слева от дырки и списком справа от неё. Значит $L' \cong L \times L = L^2$.

Задача 3. Не пользуясь готовой формулой для L' , продифференцируйте рекурсивное уравнение из задачи 1, пользуясь правилами $1' = 0$, $X' = 1$, $(AB)' = A'B + AB'$. Сравните результат с задачей 2.

Краткое решение. Из $L = 1 + XL$ получаем $L' = L + XL'$. Так как $L = \frac{1}{1-X}$, то $L' = \frac{L}{1-X} = L^2$. Это совпадает с комбинаторным описанием «левый список $\times$ правый список».

Задача 4. Пусть $L(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. Объясните комбинаторно, почему коэффициент при x^n равен 1, если мы забыли метки и считаем только форму списка. Найдите $L(x)$ в замкнутом виде.

Краткое решение. Для каждого n есть ровно одна непомеченная форма линейного списка длины n . Поэтому $L(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Листок 2. Деревья Каталана: OGF, EGF и производная

Задача 1. Рассмотрим полные плоские бинарные деревья, где атомами считаются листья. Запишите структурное уравнение B . Какая производящая функция естественнее для непомеченных форм — OGF или EGF? Почему?

Краткое решение. Дерево либо один лист, либо корень с упорядоченной парой поддеревьев: $B = X + B^2$. Для непомеченных форм естественна OGF: x считает число листьев, а коэффициент — число форм.

Задача 2. Пусть $B(x) = \sum_{n \geq 1} b_n x^n$, где b_n — число форм с n листьями. Переведите структурное уравнение в уравнение для $B(x)$ и найдите $b_1, \dots, b_5$ без явной формулы Каталана.

Краткое решение. $B(x) = x + B(x)^2$. Сравнение коэффициентов даёт $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 5, b_5 = 14$.

Задача 3. Теперь n листьев получают различные метки. Если непомеченных форм b_n , сколько получается помеченных деревьев? Что произойдёт, если эти числа упаковать в EGF?

Краткое решение. На каждой форме метки можно расставить $n!$ способами, значит помеченных деревьев $n!b_n$. В EGF: $\sum (n!b_n)x^n/n! = \sum b_n x^n$ — формально тот же ряд, но с другим смыслом коэффициентов.

Задача 4. Удаляем один лист и оставляем дырку. Если дырка — всё дерево, что получается? Если нет, какую информацию надо хранить на каждом шаге от дырки к корню? Запишите рекурсивное уравнение для B' .

Краткое решение. Если дырка — всё дерево, получаем единичный контекст 1. Иначе надо помнить сторону (2 выбора), соседнее поддерево B и оставшийся контекст B' . Поэтому $B' = 1 + 2BB'$.

Задача 5. Продифференцируйте формально $B = X + B^2$ и сравните с комбинаторным уравнением для B' .

Краткое решение. $B' = 1 + 2BB'$ — ровно то же уравнение, что получилось из контекста.

Задача 6. Зафиксируйте соглашение: размер — число листьев. Какой размер имеют X, B и B^2 ? Почему внутренний корень не даёт дополнительной единицы размера?

Краткое решение. X имеет размер 1. B может иметь любой положительный размер n — число листьев. В B^2 размеры двух поддеревьев складываются. Внутренний корень не является X -атомом, поэтому размера не добавляет.

Задача 7. Если левое поддерево имеет k листьев, а правое m , какой размер имеет всё дерево? Как это отражается в коэффициенте при x^{k+m} в $B(x)^2$?

Краткое решение. Размер равен $k + m$. В произведении $B(x)^2$ член $b_k b_m x^{k+m}$ учитывает выбор левой формы размера k и правой формы размера m ; суммирование по $k + m = n$ даёт коэффициент b_n .

Задача 8. Объясните, почему произведение $B(x)^2$ для непомеченных форм не содержит биномиального коэффициента выбора меток, а в помеченном случае естественно возникает EGF.

Краткое решение. В непомеченном случае комбинируются только формы. В помеченном произведении species надо выбрать, какие k из n меток идут в левое поддерево: появляется $C(n, k)$. EGF-нормировка превращает это в обычное произведение рядов.

Задача 9. В модели $B = X + B^2$ атомами являются только листья. Что именно означает B' ? Можно ли дыркой заменить внутреннюю вершину?

Краткое решение. B' — B -дерево с одним специальным атомом вместо одного листа. Внутренняя вершина не является X -атомом, поэтому обычная производная по X её не выделяет.

Задача 10. Пусть дырка не является всем деревом. Опишите один слой контекста: что надо знать, чтобы из дырки сделать шаг к родителю?

Краткое решение. Нужно знать, была дырка в левом или правом поддереве, и сохранить второе, соседнее поддерево. Один слой имеет тип $2B$.

Задача 11. Если слоёв контекста может быть $0, 1, 2, \dots$, какой тип описывает весь контекст? Запишите его через $\text{SEQ}(2B)$.

Краткое решение. Полный путь от дырки к корню — последовательность слоёв $2B$: $B' \cong \text{SEQ}(2B)$.

Задача 12. Получите уравнение $B' = 1 + 2BB'$, решите его как геометрический ряд и свяжите ответ с $\text{SEQ}(2B)$.

Краткое решение. $B' = \frac{1}{1-2B} = 1 + 2B + (2B)^2 + \dots = \text{SEQ}(2B)$.

Листок 3. Помеченные корневые деревья

Задача 1. Пусть T — корневые помеченные неплоские деревья: атомы — все вершины, одна вершина выделена как корень, дети не упорядочены. После удаления корня дерево распадается на несколько корневых поддеревьев. Запишите T через X , T и SET . Объясните роль X и $SET(T)$.

Краткое решение. $T = X \cdot SET(T)$. X — корневая вершина, один атом. После её удаления остаётся неупорядоченное множество корневых поддеревьев, поэтому $SET(T)$, а не $SEQ(T)$.

Задача 2. Почему для этих деревьев естественно использовать EGF, а не OGF? Объясните через распределение меток между компонентами.

Краткое решение. Вершины имеют различные метки. При произведениях и SET нужно распределять глобальный набор меток между поддеревьями; EGF нормирована именно так, чтобы обычное произведение рядов кодировало эти биномиальные коэффициенты.

Задача 3. Пусть $A(x)$ — EGF помеченного класса A . Выведите EGF для $SET_k(A)$: сначала для упорядоченной k -ки, затем забудьте порядок. После этого просуммируйте по $k \geq 0$ и получите $SET(A)$.

Краткое решение. Упорядоченная k -ка даёт $A(x)^k$. Забывая порядок, делим на $k!$: $SET_k(A) \leftrightarrow \frac{A(x)^k}{k!}$. Сумма по $k \geq 0$ даёт $SET(A) \leftrightarrow \exp(A(x))$.

Задача 4. Переведите $T = X \cdot SET(T)$ в функциональное уравнение для EGF $T(x)$. Отдельно объясните, чему соответствуют X и $SET(T)$.

Краткое решение. $X \mapsto x$, $SET(T) \mapsto \exp(T(x))$, поэтому $T(x) = xe^{T(x)}$.

Задача 5. Если $T(x) = \sum_{n \geq 1} t_n \frac{x^n}{n!}$, что комбинаторно означает t_n ? Как оно связано с числом неукоренённых помеченных деревьев на n вершинах?

Краткое решение. t_n — число корневых помеченных деревьев на фиксированном наборе n меток. Если u_n — число неукоренённых, то $t_n = nu_n$: корень можно выбрать n способами.

Задача 6. Используйте формулу Лагранжа: если $Y = x\varphi(Y)$, то $[x^n]Y = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\varphi(u)^n$. Примените её к $T = xe^T$ и найдите t_n .

Краткое решение. $[x^n]T = \frac{1}{n}[u^{n-1}]e^{nu} = \frac{n^{n-1}}{n!}$. Следовательно, $t_n = n^{n-1}$.

Задача 7. Из результата предыдущей задачи получите число неукоренённых помеченных деревьев на n вершинах.

Краткое решение. $u_n = t_n/n = n^{n-2}$: формула Кэли.

Задача 8. Пусть U — species неукоренённых помеченных деревьев. Что означают U' и XU' ? Объясните комбинаторно, почему $XU' = T$, и переведите это в уравнение для EGF.

Краткое решение. U' — дерево с одной специальной вершиной $*$. Умножение на X заполняет её обычным атомом и сохраняет выделенность: получается дерево с выбранной вершиной, то есть корневое дерево. Поэтому $XU' = T$ и $xU'(x) = T(x)$.

Задача 9. Получите U через T без прямого интегрирования e^T . Продифференцируйте $T = xe^T$, выразите e^T через T и T' и узнайте производную простой функции от T .

Краткое решение. Из $xU' = T$ и $T = xe^T$ имеем $U' = e^T$. Дифференцируя $T = xe^T$: $T' = e^T + TT'$, значит $e^T = T' - TT' = \frac{d}{dx}(T - \frac{T^2}{2})$. При нулевых константах $U = T - \frac{T^2}{2}$.

Листок 4. Разбиения множества: Bell, Stirling и производная

Задача 1. Берём конечное множество различных меток и разбиваем его на непустые блоки. Что является атомом X ? Какой тип имеет один блок? Как из блоков строится всё разбиение? Запишите species Π всех разбиений.

Краткое решение. Атом X — один элемент исходного множества. Один блок: $\text{SET}_{\geq 1}(X)$. Разбиение — неупорядоченное множество блоков: $\Pi = \text{SET}(\text{SET}_{\geq 1}(X))$.

Задача 2. В разбиении один атом заменён дыркой. Разбейте структуру на: (a) остаток блока, в котором была дырка; (b) все остальные блоки. Объясните структурное равенство $\Pi' = \text{SET}(X) \cdot \Pi$.

Краткое решение. Бывший блок после удаления $*$ оставляет произвольное $\text{SET}(X)$, возможно пустое; остальные блоки образуют произвольное Π . Поэтому $\Pi' = \text{SET}(X) \cdot \Pi$.

Задача 3. Переведите $\Pi' = \text{SET}(X) \cdot \Pi$ в EGF и сравните коэффициенты. Получите рекурсию для чисел Белла B_n .

Краткое решение. $\Pi'(x) = e^x \Pi(x)$. Отсюда $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$ (эквивалентно $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$).

Задача 4. Введите маркер и числа блоков. Найдите двухпеременную EGF $\Pi(x, u)$ и объясните смысл коэффициента при $u^k x^n / n!$.

Краткое решение. $\Pi(x, u) = \exp(u(e^x - 1))$. Коэффициент при $u^k x^n / n!$ равен $S(n, k)$, числу разбиений n элементов на k блоков.

Задача 5. Что комбинаторно означает $\frac{\partial \Pi}{\partial u}$? Что получится после подстановки $u=1$?

Краткое решение. $\frac{\partial \Pi}{\partial u}$ выделяет один блок и перестаёт учитывать его степень u . При $u = 1$ получаем EGF разбиений с одним выделенным блоком: $(e^x - 1)\Pi(x)$.

Задача 6. Получите рекурсию $S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$ для чисел Стирлинга второго рода, рассматривая положение нового специального элемента.

Краткое решение. Новый элемент либо образует отдельный блок: $S(n, k-1)$, либо вставляется в один из k имеющихся блоков: $kS(n, k)$.

Задача 7. Вычислите $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Pi}{\partial u}$ для $\Pi(x, u)$, получите PDE, связывающее эти производные, и дайте ему комбинаторную интерпретацию.

Краткое решение. $\Pi_x = u e^x \Pi$, $\Pi_u = (e^x - 1)\Pi$, поэтому $\Pi_x = u(\Pi_u + \Pi)$. Комбинаторно новый атом либо образует новый блок $(u\Pi)$, либо попадает в один из существующих $(u\Pi_u)$.

Задача 8. Сравните коэффициенты в PDE и восстановите рекурсию для $S(n, k)$ непосредственно из производящих функций.

Краткое решение. Коэффициенты при $u^k x^n / n!$: слева $S(n+1, k)$, в $u\Pi$ — $S(n, k-1)$, в $u\Pi_u$ — $kS(n, k)$. Получаем ту же рекурсию.

Задача 9. Положите $u=1$ и объясните связь чисел Белла и Стирлинга: $B_n = \sum_k S(n, k)$.

Краткое решение. При $u = 1$ забывается число блоков: $\Pi(x, 1) = \Pi(x)$, значит $B_n = \sum_k S(n, k)$.

Листок 5. Endofunctions

Задача 1. Пусть $f : S \rightarrow S$ — отображение конечного помеченного множества в себя. Рассмотрите ориентированный граф, где из v идёт ребро в $f(v)$. Почему каждая связная компонента содержит ровно один ориентированный цикл?

Краткое решение. Идя по стрелкам $v, f(v), f^2(v), \dots$ в конечном множестве, мы обязательно повторим вершину и войдём в цикл. У каждой вершины единственный дальнейший путь; вершины, ведущие к разным циклам, не могут лежать в одной слабосвязной компоненте. Значит в компоненте ровно один цикл.

Задача 2. Опишите одну связную компоненту endofunction: что прикреплено к каждой вершине цикла?

Краткое решение. К каждой вершине ориентированного цикла прикреплено корневое дерево входящих в неё вершин; рёбра дерева направлены к корню на цикле.

Задача 3. Запишите species одной связной компоненты через $\text{CYC}(T)$, где T — корневые помеченные деревья.

Краткое решение. $C = \text{CYC}(T)$.

Задача 4. Запишите species всех endofunctions как множество связных компонент.

Краткое решение. $E = \text{SET}(\text{CYC}(T))$.

Задача 5. Для помеченного класса A выведите EGF $\text{CYC}(A)$, начиная с упорядоченной k -ки A -объектов и учитывая циклические повороты.

Краткое решение. Упорядоченная k -ка даёт $A(x)^k$; циклический порядок идентифицирует k поворотов, поэтому вклад $A(x)^k/k$. Сумма: $\text{CYC}(A) \leftrightarrow \sum_{k \geq 1} \frac{A(x)^k}{k} = -\log(1 - A(x))$.

Задача 6. Используйте $E = \text{SET}(\text{CYC}(T))$ и правила для SET/CYC, чтобы упростить $E(x)$ до простой функции от $T(x)$.

Краткое решение. $E(x) = \exp(-\log(1 - T(x))) = 1/(1 - T(x))$.

Задача 7. Посчитайте endofunctions на $[n]$ непосредственно. Какой коэффициент должен иметь $\frac{1}{1-T(x)}$ при $x^n/n!$?

Краткое решение. Каждый из n элементов независимо выбирает один из n образов: n^n функций. Значит коэффициент EGF равен $n^n/n!$.

Задача 8. Объясните комбинаторный смысл совпадения EGF $E(x) = \frac{1}{1-T(x)}$ с EGF $\text{SEQ}(T)$. Почему равенство EGF само по себе не даёт естественного изоморфизма species?

Краткое решение. Совпадение EGF означает одинаковое число объектов каждого размера. Оно не сохраняет действие переименований меток и не задаёт канонической структурной биекции. Явная биекция может зависеть от выбранного порядка меток и тогда не будет естественной.

Задача 9. Рассмотрите E' : endofunction с одной дыркой вместо вершины. Разберите структуру по слоям: обычные компоненты; особая компонента; дерево с дыркой; разрезанный цикл. Соберите формулу для E' .

Краткое решение. Обычные компоненты дают E . В особой компоненте выбран T -блок с дыркой: T' . Разрезанный в этой позиции цикл превращается в $\text{SEQ}(T)$. Поэтому $E' = E \cdot \text{SEQ}(T) \cdot T'$.

Листок 6. Повторение и перенос

Задача 1. Сравните два класса: (А) полные плоские бинарные деревья Каталана, размер — число листьев; (В) произвольные корневые помеченные деревья, размер — число вершин. Для каждого укажите атом X , структурное уравнение и естественный тип производящей функции (OGF/EGF).

Краткое решение. А: X — лист, $B = X + B^2$, естественна OGF. Б: X — вершина, $T = X \cdot \text{SET}(T)$, естественна EGF.

Задача 2. Для каждого описания назовите естественную операцию: SET, SEQ, CYC или произведение: (1) несколько неупорядоченных корневых деревьев; (2) несколько деревьев в линейном порядке; (3) деревья расположены по окружности без начала; (4) один специальный блок разбиения и обычное разбиение остальных элементов.

Краткое решение. 1) $\text{SET}(T)$; 2) $\text{SEQ}(T)$; 3) $\text{CYC}(T)$; 4) произведение $\text{SET}_{\geq 1}(X) \cdot \Pi$.

Задача 3. Пусть $A(x)$ — EGF помеченного класса А. Запишите формулы для $\text{SET}(A)$, $\text{SEQ}(A)$, $\text{CYC}(A)$ и кратко объясните каждую.

Краткое решение. $\text{SET}(A) \leftrightarrow e^{A(x)}$; $\text{SEQ}(A) \leftrightarrow 1/(1 - A(x))$; $\text{CYC}(A) \leftrightarrow -\log(1 - A(x))$.

Задача 4. Пусть F и G — помеченные species. Объясните, почему для произведения species коэффициент на n метках равен $\sum_k \binom{n}{k} f_k g_{n-k}$, и почему это соответствует обычному произведению EGF.

Краткое решение. Выбираем k меток для F , остальные идут в G : $\binom{n}{k}$ вариантов; затем $f_k g_{n-k}$. В EGF $\frac{x^k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!}$, поэтому обычное произведение рядов кодирует ту же сумму.

Задача 5. Для трёх классов дайте словесный смысл производной: L' для списков; B' для $B = X + B^2$ с атомами-листьями; T' для корневых помеченных деревьев, где атомы — все вершины.

Краткое решение. L' — список с одним специальным элементом/дыркой; B' — бинарное дерево с дыркой вместо одного листа; T' — корневое дерево с одной специальной вершиной *.

Задача 6. Для корневых помеченных деревьев T разберите T' и XT' . Если $t_n = n^{n-1}$, сколько структур типа XT' на n метках?

Краткое решение. XT' — корневое дерево с дополнительно выбранной обычной вершиной; она может совпасть с корнем. Поэтому $n \cdot n^{n-1} = n^n$.

Задача 7. Endofunctions $E = \text{SET}(\text{CYC}(T))$ и $\text{SEQ}(T)$ имеют одинаковую EGF. Что отсюда можно заключить о числах объектов каждого размера? Чего нельзя заключить о самих species?

Краткое решение. Можно заключить равенство чисел объектов каждого размера. Нельзя заключить естественный изоморфизм species или каноническую биекцию, согласованную с переименованиями меток.

Задача 8. Сформулируйте разницу между: (1) одинаковыми числами объектов каждого размера; (2) существованием явной биекции по размерам; (3) естественным изоморфизмом species.

Краткое решение. 1) Только равенство мощностей. 2) Конкретное взаимно-однозначное правило по размерам. 3) Биекция ещё и коммутирует со всеми переименованиями меток. Третий уровень сильнее второго.

Задача 9. Дайте структурную интерпретацию выражений $\text{SET}(T)$, $\text{CYC}(T)$, XT' и T' без обращения к готовым формулам.

Краткое решение. $\text{SET}(T)$ — неупорядоченный лес; $\text{CYC}(T)$ — цикл корневых деревьев; XT' — корневое дерево с дополнительно выделенной обычной вершиной; T' — корневое дерево с одной специальной вершиной/дыркой.

Листок 7. Маркеры и частные производные

Задача 1. Пусть u считает число компонент. Объясните комбинаторный смысл $\frac{d}{du}(u^k) = k u^{k-1}$. Чем отличаются $\frac{\partial}{\partial u}$ и $u \frac{\partial}{\partial u}$?

Краткое решение. $\partial/\partial u$ выбирает одну из k компонент и перестаёт учитывать её степень u . Оператор $u\partial/\partial u$ выбирает её, но продолжает считать в общем числе компонент.

Задача 2. Для $\Pi(x, u) = \exp(u(e^x - 1))$ объясните комбинаторный смысл $\frac{\partial \Pi}{\partial u}$ и $u \frac{\partial \Pi}{\partial u}$.

Краткое решение. $\partial \Pi / \partial u$ — разбиение с одним выделенным блоком, который больше не несёт вес u ; $u \partial \Pi / \partial u$ — тот же выделенный блок, но общее число блоков по-прежнему отмечено u .

Задача 3. Для той же $\Pi(x, u)$ объясните комбинаторный смысл $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ и $x \frac{\partial \Pi}{\partial x}$. Сравните маркер u и атомную переменную x .

Краткое решение. $\partial \Pi / \partial x$ выделяет один атом и превращает его в специальный $*$, не учитываемый x ; $x \partial \Pi / \partial x$ — pointing, выделенный атом остаётся в размере. И x , и u -производная ставят флажок, но x — labeled-атомная переменная, u — маркер статистики.

Задача 4. Что означают $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u^2}$ и $u^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u^2}$? Являются ли два выделенных блока упорядоченными? Как получить неупорядоченную пару выделенных блоков?

Краткое решение. Вторая производная даёт $k(k-1)$: упорядоченную пару различных блоков с различимыми флажками. Умножение на u^2 возвращает их в счёт блоков. Для неупорядоченной пары надо разделить на $2!$.

Задача 5. Пусть u считает число циклов перестановки. Что комбинаторно означают $u \frac{\partial P}{\partial u}$ и $\frac{1}{2} u^2 \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}$? Проверьте смысл на перестановках трёх элементов.

Краткое решение. Первое — перестановка с одним выделенным циклом, второе — с неупорядоченной парой выделенных циклов. В S_3 всего выделенных циклов $3+3\cdot 2+2\cdot 1=11$, а неупорядоченных пар $C(3,2)+3C(2,2)=6$.

Задача 6. Запишите species перестановок как $\text{SET}(\text{CYC}(X))$ и получите двухпеременную EGF $P(x, u)$, где u отмечает циклы.

Краткое решение. $P(x, u) = \exp(u[-\log(1-x)]) = (1-x)^{-u}$.

Задача 7. Вычислите $u \frac{\partial P}{\partial u}$ и объясните результат двумя способами: по коэффициентам ряда и по замкнутой формуле.

Краткое решение. $u P_u = -u \log(1-x) P$. В коэффициентах оператор умножает объект с k циклами на k , сохраняя u^k ; та же формула получается прямым дифференцированием $(1-x)^{-u}$.

Задача 8. Положите $u=1$ и найдите EGF общего числа циклов во всех перестановках n элементов. Выведите, что среднее число циклов равно H_n .

Краткое решение. При $u=1$: $\frac{-\log(1-x)}{1-x} = \sum_{n \geq 1} H_n x^n$. Это EGF, поэтому общее число циклов равно $n! H_n$, а среднее — H_n .

Задача 9. Используйте $u^2 P_{uu}|_{u=1}$ для вычисления второго факториального момента числа циклов и выразите через него дисперсию.

Краткое решение. $\mathbb{E}[K(K-1)] = H_n^2 - H_n^{(2)}$, где $H_n^{(2)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$. Поэтому $\text{Var}(K) = \mathbb{E}[K(K-1)] + \mathbb{E}[K] - \mathbb{E}[K]^2 = H_n - H_n^{(2)}$.

Листок 8. Композиция species, Bell polynomials, Faà di Bruno

Задача 1. Пусть $F=SEQ$ и $G = SET_{\geq 1}(X)$. На множестве меток $\{1,2,3\}$ опишите структуры $F \circ G$ и посчитайте их число. Помните: общий размер по-прежнему равен числу исходных атомов.

Краткое решение. Это упорядоченные разбиения $\{1,2,3\}$ на непустые блоки. По числу блоков: $1 + 3 \cdot 2! + 1 \cdot 3! = 13$.

Задача 2. Замените внешний SEQ на SET: $SET(SET_{\geq 1}(X))$. Для $n=3$ получите число разбиений через $\exp(G(x))$ и объясните роль делителей $k!$.

Краткое решение. Получаем обычные разбиения множества: $\exp(e^x - 1)$. Коэффициент при x^3 равен $5/3! = 5/6$, то есть разбиений 5. Делитель $k!$ забывает порядок внешних блоков.

Задача 3. Пусть $G(x) = e^x - 1$. Для $n=4$ рассмотрите $\frac{G(x)^2}{2!}$. Отдельно посчитайте разбиения типов 1+3 и 2+2 и проверьте коэффициент при x^4 .

Краткое решение. Тип 1 + 3: 4. Тип 2 + 2: $\binom{4}{2}/2 = 3$. Всего 7, поэтому $[x^4]G(x)^2/2! = 7/4! = 7/24$.

Задача 4. Посчитайте число разбиений 5 элементов типа 1+2+2 и 6 элементов типа 2+2+2: комбинаторно и через соответствующие члены $\frac{G(x)^k}{k!}$.

Краткое решение. Тип 1 + 2 + 2: $5 \cdot 3 = 15$. Тип 2 + 2 + 2: $\frac{6!}{(2!)^3 3!} = 15$. Те же делители возникают из $(x^2/2!)^m/m!$ во внешнем SET.

Задача 5. Пусть m_j — число блоков размера j . Выведите число разбиений фиксированного типа $(m_1, m_2, \dots)$ и проверьте формулу на типе 1+1+2+3 при $n=7$.

Краткое решение. Число равно $\frac{n!}{\prod_j (j!)^{m_j} m_j!}$. Для 1 + 1 + 2 + 3: $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 210$.

Задача 6. Пусть $G(x) = \sum_{j \geq 1} g_j \frac{x^j}{j!}$. Объясните появление множителя $g_j^{m_j}$. Для $n=5, k=3$ сравните типы 3+1+1 и 2+2+1; затем измените g_2 с 1 на 2.

Краткое решение. Каждый из m_j блоков размера j независимо получает одну из g_j внутренних структур, отсюда $g_j^{m_j}$. При $g_j = 1$: 3+1+1 даёт 10, 2+2+1 — 15. Если $g_2 = 2$, второй тип умножается на 2^2 и даёт 60.

Задача 7. Пусть $F(y) = \sum_k f_k \frac{y^k}{k!}$ и $G(x) = \sum_j g_j \frac{x^j}{j!}$. Объясните формулу $a_n = \sum_k f_k B_{n,k}(g_1, g_2, \dots)$ для коэффициентов $F(G(x))$. Проверьте её на $F=SEQ, G = SET_{\geq 1}(X), n=3$.

Краткое решение. $B_{n,k}$ считает внутренний слой: разбиение n меток на k G -блоков с внутренними структурами; f_k выбирает внешнюю F -структуру. Для SEQ $f_k = k!, g_j = 1$: $a_3 = 1!S(3, 1) + 2!S(3, 2) + 3!S(3, 3) = 13$.

Задача 8. Пусть $H(x) = F(G(x))$. Выведите H'' комбинаторно, различая случаи: два выделенных атома попали в один G -блок или в два разных блока.

Краткое решение. $H'' = F'(G)G'' + F''(G)(G')^2$. Первое слагаемое — оба флажка в одном блоке, второе — в двух разных.

Задача 9. Выведите H''' комбинаторно по типам разбиения трёх различных флажков: 3, 2+1, 1+1+1. Объясните коэффициент 3.

Краткое решение. $H''' = F'(G)G''' + 3F''(G)G'G'' + F'''(G)(G')^3$. Коэффициент 3 — три способа выбрать singleton-флажок в разбиении типа 2 + 1.

Листок 9. Атомная дырка, рекурсивная дырка и zipper

Задача 1. Для списка $L=1+XL$ и конкретного списка $[a,b,c,d]$ сравните два вида фокуса: (а) атомная дырка вместо c ; (б) дырка вместо целого хвоста $[c,d]$. Какую информацию хранит каждый контекст?

Краткое решение. Атомная дырка $[a,b,\square,d]$ задаётся левым списком $[a,b]$ и правым $[d]$. Дырка вместо хвоста $[c,d]$ хранит только префикс как цепочку frames $a::, b::$; сам фокус уже содержит c,d .

Задача 2. Запишите одношаговый конструктор списка $\Phi(X, Y) = 1 + XY$. Что означает $\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = X$ как один frame рекурсивного контекста? Как последовательность frames восстанавливает префикс?

Краткое решение. $\Phi_Y = X$: один frame хранит головной атом, стоявший перед рекурсивным хвостом. Последовательность таких X -frames восстанавливает весь префикс.

Задача 3. Для каталановского дерева $B = X + B^2$ запишите $\Phi(X, Y) = X + Y^2$ и найдите $\frac{\partial \Phi}{\partial Y}$. Расшифруйте один frame как «лево/право + соседнее поддерево» и объясните, почему полный контекст — $\text{SEQ}(2B)$.

Краткое решение. $\Phi_Y = 2Y$, после $Y = B$ один frame имеет тип $2B$. Путь от фокуса до корня — последовательность frames: $\text{SEQ}(2B)$.

Задача 4. Пусть общий рекурсивный тип удовлетворяет $T = \Phi(X, T)$. Обозначьте $A = \Phi_Y(X, T)$ и $C = \text{SEQ}(A)$. Покажите структурно, что $T' = C \cdot \Phi_X$ в рассматриваемых простых случаях.

Краткое решение. Из дифференцирования $T' = \Phi_X + \Phi_Y T'$. Значит локальная часть Φ_X окружена нулём или более внешних frames Φ_Y : $T' = \text{SEQ}(\Phi_Y) \cdot \Phi_X = C \cdot \Phi_X$.

Задача 5. Примените предыдущую схему к списку: $\Phi(X, Y) = 1 + XY$. Получите C и L' и объясните, почему атомная дырка содержит больше информации, чем дырка вместо рекурсивного хвоста.

Краткое решение. $\Phi_Y = X$, $C = \text{SEQ}(X) = L$; $\Phi_X = Y$, после $Y = L$ получаем $\Phi_X = L$. Поэтому $L' = L \cdot L$. Рекурсивная дырка хранит только префикс; атомная дырка должна ещё сохранить хвост справа от выделенного атома.

Задача 6. Примените схему к $D = X + XD^2$ (атомами считаются все вершины). Для $\Phi(X, Y) = X + XY^2$ найдите Φ_Y , C , Φ_X и D' . Дайте zipper-интерпретацию каждого множителя.

Краткое решение. $\Phi_Y = 2XY$, $C = \text{SEQ}(2XD)$; $\Phi_X = 1 + Y^2$, то есть $1 + D^2$. Поэтому $D' = \text{SEQ}(2XD) \cdot (1 + D^2)$. Frame хранит сторону, атом родителя и соседнее поддерево; $1 + D^2$ описывает локальную структуру в выделенной вершине.

Листок 10. Производные регулярных выражений Бржозовского

Задача 1. Для $R = (a + b)b$ найдите $D_a(R)$ и $D_b(R)$ непосредственно из определения $D_a L = \{w : aw \in L\}$.

Краткое решение. $L(R) = \{ab, bb\}$. После чтения a или b остаётся b . Поэтому $D_a(R) = b$ и $D_b(R) = b$.

Задача 2. Для $R = a^*b$ найдите $D_a(R)$, $D_b(R)$ и определите, является ли R nullable.

Краткое решение. $D_a(R) = a^*b$; $D_b(R) = \varepsilon$. R не nullable.

Задача 3. Используйте правило произведения $D_a(RS) = D_a(R)S +$ (если R nullable) $D_a(S)$, чтобы заново найти $D_a(a^*b)$.

Краткое решение. $D_a(a^*) = a^*$; a^* nullable, поэтому $D_a(a^*b) = a^*b + D_a(b) = a^*b$.

Задача 4. Для $R = (ab)^*$ найдите $D_a(R)$ и $D_b(R)$, используя правило $D_a(R^*) = D_a(R)R^*$.

Краткое решение. $D_a((ab)^*) = b(ab)^*$; $D_b((ab)^*) = a(ab)^*$.

Задача 5. Для $R = (ab)^*$ найдите все различные производные, возникающие после чтения любых слов, и отметьте nullable-состояния.

Краткое решение. Три состояния: $A = (ab)^* \text{ (nullable)}$, $B = b(ab)^* \text{ (не nullable)}$, $C = ab(ab)^* \text{ (не nullable)}$.
Переходы: $A \xrightarrow{a} B$, $A \xrightarrow{b} C$; $B \xrightarrow{b} A$, $C \xrightarrow{a} B$; зациклено.

Задача 6. Пусть $R = (a + b)^*ab$. Найдите $D_a(R)$ и $D_b(R)$.

Краткое решение. $D_a(R) = R + b$; $D_b(R) = R$.

Задача 7. Пусть $Q = R + b$ и $P = R + \varepsilon$. Найдите производные Q и P по a и b ; определите, какие остаточные языки nullable.

Краткое решение. $D_a(Q) = Q$, $D_b(Q) = P$; $D_a(P) = Q$, $D_b(P) = R$. Из R, Q, P только P nullable.

Задача 8. Определим $D_{uv}(R) = D_v(D_u(R))$. Для языка слов, оканчивающихся на ab , найдите остаточные языки после префиксов a , aa , aba , $abab$. Сформулируйте смысл $D_w(R)$.

Краткое решение. После a : Q ; после aa : Q ; после aba : Q ; после $abab$: P . Вообще $D_w(R) = \{z : wz \in L(R)\}$ — язык допустимых продолжений после префикса w .

Листок 11. Синтез

Задача 1. Конечное множество непустых линейно упорядоченных блоков на помеченных атомах: исходное множество меток разбивается на непустые блоки, внутри каждого блока задан линейный порядок, а блоки между собой не упорядочены. Запишите species, EGF, объясните выбор EGF и введите маркер и числа блоков.

Краткое решение. Species: $\text{SET}(\text{SEQ}_{\geq 1}(X))$. EGF: $\exp(\frac{x}{1-x})$. EGF естественна из-за различных меток. С маркером числа блоков: $\exp(\frac{ux}{1-x})$.

Задача 2. Помеченные атомы разбиты на непустые циклически упорядоченные блоки; сами блоки не упорядочены. Определите species и EGF.

Краткое решение. $\text{SET}(\text{CYC}(X))$; EGF $\exp(-\log(1-x)) = 1/(1-x)$.

Задача 3. Разбиение помеченного множества на непустые блоки, причём один блок выделен. Запишите species, EGF и свяжите с $\frac{\partial \Pi}{\partial u}$ при $u=1$ для $\Pi(x, u) = \exp(u(e^x - 1))$.

Краткое решение. Species: $\text{SET}_{\geq 1}(X) \cdot \Pi$. EGF: $(e^x - 1) \exp(e^x - 1)$. Это $\Pi_u|_{u=1}$.

Задача 4. Разбиение помеченного множества, в котором один атом выделен. Получите EGF двумя способами: непосредственно и через pointing. Не спутайте $\Pi'(x)$ и $x\Pi'(x)$.

Краткое решение. Непосредственно: $X \cdot \text{SET}(X) \cdot \Pi$, EGF $xe^x \Pi(x)$. Через pointing: $\Pi' = e^x \Pi$, поэтому $x\Pi' = xe^x \Pi$.

Задача 5. Корневое помеченное дерево с дополнительно выделенной вершиной, которая может совпадать с корнем. Запишите species/операцию, EGF и число таких структур на n метках, если обычных корневых деревьев n^{n-1} .

Краткое решение. Это pointing XT' ; EGF $xT'(x)$. Число структур $n \cdot n^{n-1} = n^n$.

Задача 6. Помеченное множество разбито на циклы, и один цикл выделен. Запишите species, EGF и свяжите с маркером числа циклов в $P(x, u) = (1-x)^{-u}$.

Краткое решение. $\text{CYC}(X) \cdot \text{SET}(\text{CYC}(X))$; EGF $-\frac{\log(1-x)}{1-x}$. Это $P_u|_{u=1}$.

Задача 7. Полное плоское бинарное дерево $B = X + B^2$, атомы — листья. Сравните непомеченную OGF и помеченную EGF после назначения различных меток листьям. Если OGF-коэффициент равен C_{n-1} , сколько помеченных деревьев?

Краткое решение. Помеченных деревьев $n!C_{n-1}$; после EGF-нормировки коэффициент снова C_{n-1} . Формальный ряд совпадает с OGF, но смысл коэффициентов различен.

Задача 8. Неупорядоченное множество непустых линейных списков, причём в каждом списке один атом выделен. Запишите species, EGF и укажите, где появляется pointing.

Краткое решение. Для одного списка $A = \text{SEQ}_{\geq 1}(X)$, pointing даёт $XA' = X \cdot \text{SEQ}(X)^2$. Внешняя структура: $\text{SET}(X \cdot \text{SEQ}(X)^2)$. EGF: $\exp(\frac{x}{(1-x)^2})$. Pointing применяется внутри каждой компоненты до внешнего SET.

Листок 12. Burnside–Pólya и cycle index series

Задача 1. Возьмите species SET на фиксированном множестве $\{1,2,3\}$. Любая перестановка меток сохраняет единственную SET-структуру. В S_3 есть 1 тождество, 3 транспозиции и 2 трёхцикла. Запишите $Z_{\text{SET},3}(p_1, p_2, p_3)$ как усреднение мономов циклических типов.

Краткое решение. $Z_{\text{SET},3} = \frac{1}{6}(p_1^3 + 3p_1p_2 + 2p_3)$.

Задача 2. Из $Z_{\text{SET},3}$ сделайте две подстановки: (a) $p_1 = x, p_2 = p_3 = \dots = 0$; (b) $p_j = x^j$. Объясните, почему первая даёт помеченную EGF-часть, а вторая — непомеченную OGF-часть.

Краткое решение. а) $x^3/6$: выживает только identity. б) x^3 : каждый циклический моном превращается в $x^{\sum j c_j} = x^3$, а Burnside даёт одну орбиту.

Задача 3. Выведите общий cycle index SET: сгруппируйте перестановки по числам m_j циклов длины j , используйте число перестановок данного циклического типа $\frac{n!}{\prod_j j^{m_j} m_j!}$, а затем просуммируйте по всем наборам (m_j) .

Краткое решение. После деления на $n!$ вклад типа (m_j) : $\prod_j \frac{p_j^{m_j}}{j^{m_j} m_j!}$. Сумма по всем m_j распадается в произведение $\prod_j \sum_{m \geq 0} \frac{(p_j/j)^m}{m!} = \exp(\sum_{j \geq 1} p_j/j)$.

Задача 4. Для SET на 3 позициях подставьте $p_j = r^j + b^j$. Упростите результат и интерпретируйте коэффициенты как орбиты двухцветных раскрасок.

Краткое решение. Получаем $r^3 + r^2b + rb^2 + b^3$: четыре орбиты RRR, RRB, RBB, BBB.

Задача 5. Для четырёх вершин на окружности с точностью до вращений используйте cycle index C_4 : $\frac{1}{4}(p_1^4 + p_2^2 + 2p_4)$. Подставьте $p_j = r^j + b^j$, упростите и объясните, почему при двух красных и двух синих возникают две орбиты.

Краткое решение. Получаем $r^4 + r^3b + 2r^2b^2 + rb^3 + b^4$. Две орбиты типа 2 + 2: красные соседние (RRBB) и красные чередуются (RBRB).

Задача 6. Объясните, как формула Burnside превращается в cycle index, если вместо немедленного суммирования по симметриям сохранять «паспорт» циклического типа $p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots$. Почему подстановка $p_j = r^j + b^j$ считает раскраски, фиксированные данной перестановкой?

Краткое решение. Cycle index: $Z_{F,n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{Fix}_F(\sigma) \prod_j p_j^{c_j(\sigma)}$. В фиксированной раскраске все элементы одного j -цикла должны иметь один цвет, поэтому цикл даёт $r^j + b^j$. Подстановка превращает паспорт перестановки в производящую функцию фиксированных раскрасок; усреднение Бернсайда считает орбиты.